Modelação Dinâmica

António Câmara
SIMA

Modelação dinâmica

- Desenvolvimento de modelos de simulação dinâmica
- Solução de equações diferenciais utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta
- Resolução simplificada de equações de derivadas parciais
- Estimação de parâmetros

Modelação dinâmica

- Verificação de modelos
- Análise de políticas
- Caos

Desenvolvimento de modelos de simulação dinamica

- Desenvolvimento preliminar do modelo
  - Definição do problema e objectivos do modelo
  - Definição dos limites do modelo
  - Descrição verbal
  - Diagrama causal (definição das variáveis e relações de dependência, análise de ciclos de retroacção)

Desenvolvimento de modelos de simulação dinamica

- Desenvolvimento das equações do modelo
  - Definição preliminar das equações do modelo
  - Análise dimensional
  - Determinação das relações quantitativas
  - Quantificação dos parametros
  - Teste de validade da estrutura do modelo

Desenvolvimento de modelos de simulação dinamica

- Resolução das equações do modelo
  - Escolha do método de integração
  - Programação ou escolha de software apropriado
- Estimação dos parametros
- Verificação do modelo
- Análise de sensibilidade
- Análise de políticas

Solução de equações diferenciais utilizando o método de Euler

$dP/dt = P*F - P/E$

$P_t = P_{t-dt} + dt\ (BR_{t-1,t} - DR_{t-1,t})$

$P_0 = 4000000$

$BR_{t,t+1} = P_t * F$

$F = 0.05$

$DR_{t,t+1} = P_t/E$

$E = 50$

DT= 1 (ano)

Solução de equações diferenciais utilizando o método de Euler

Tempo, a	P, bilioes	BR, b/a	DR, b/a	BR-DR,b/a	DT(BR-DR)
0	4	0.2	0.08	0.12	0.12
1	4.12	0.206	0.0824	0.124	0.124
2	4.244	0.212	0.085	0.127	0.127
3	4.371	0.219	0.087	0.132	0.132

Solução de equações diferenciais utilizando o método de Runge Kutta

$x_{n+1} = x_n + h\, f(x_n, t_n)$ (método de Euler, Runge Kutta de 1ª ordem) (h é o “dt” do exemplo anterior)

$x_{n+1} = x_n + h\, f\left(x_n + h/2\, f(x_n, t_n), t_n + h/2\right)$ (método de Runge Kutta de 2ª ordem)

Solução de equações diferenciais utilizando o método de Runge Kutta

$x_{n+1} = x_n + h/6\ (k1 + 2\ k2 + 2\ k3 + k4)$

where

$k1 = f(x_n, t_n)$

$k2 = f(x_n + hk1/2, t_n + h/2)$

$k3 = f(x_n + hk2/2, t_n + h/2)$

$k4 = f(x_n + hk3, t_n + h)$

(Método de Runge Kutta de quarta ordem)

Erros do métodos $E = C.h^k$, em que C é uma constante e k, a ordem do método

Solução de equações diferenciais utilizando o método de Euler

- Sistemas de duas equações diferenciais

$dy_1/dt = f(y_1, y_2)$

$dy_2/dt = g(y_1, y_2)$

$y_{1,i+1} = y_{1,i} + f(y_{1,i}, y_{2,i})dt$

$y_{2,i+1} = y_{2,i} + g(y_{1,i}, y_{2,i})dt$

Resolução simplificada de equações de derivadas parciais

Equação de difusão

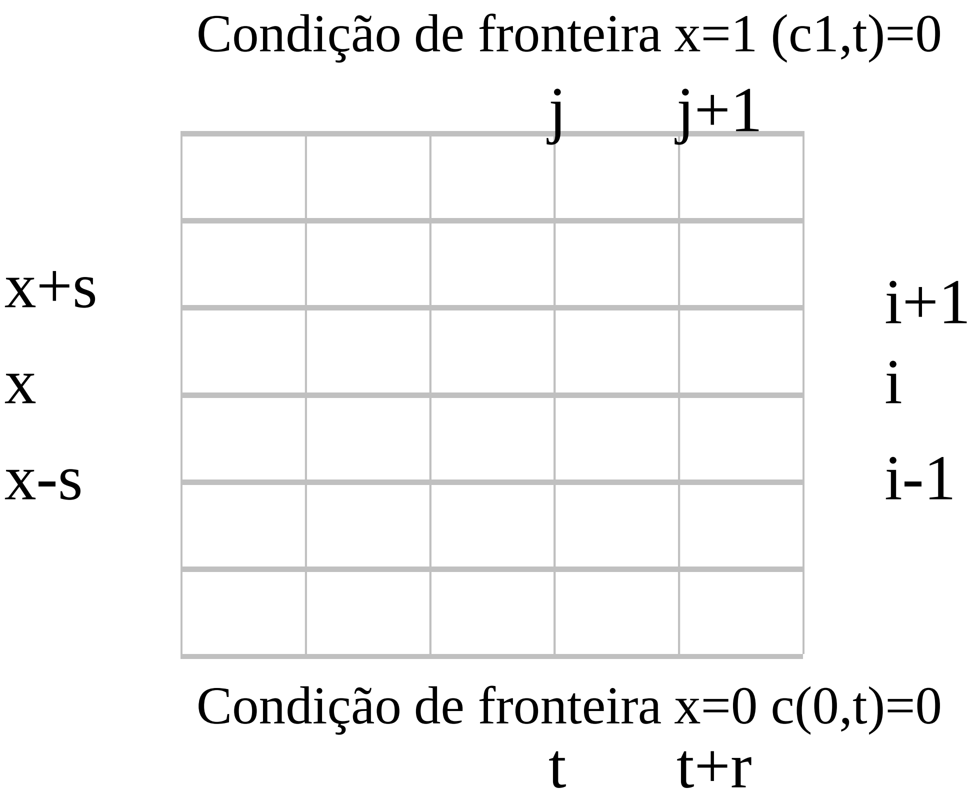
$\partial c(x.t)/ \partial t= D\ \partial^2 c(x,t)/ \partial x^2$

em que c representa a concentração de um contaminante numa direcção ao longo de um eixo representado por x e ao longo do tempo t com um coeficiente de difusão D

representação simplificada:

$c_t = Dc_{xx}$

Resolução simplificada de equações de derivadas parciais



Resolução simplificada de equações de derivadas parciais

$c_t = [c(x, t+r) - c(x,t)]/r$

da definição de derivada parcial

$$c_t = \lim_{r \to 0} \{[c(x, t+r) - c(x,t)]/r\}$$

Resolução simplificada de equações de derivadas parciais

De forma similar

$c_{xx} = [c_x(x + s,t) - c_x(x,t)]/s =$

$1/s \{ [c(x + 2s, t) - c(x+s,t)]/s - [c(x+s,t) - c(x,t)]/s\} =$

$[c(x+2s,t)-2c(x+s,t)+c(x,t)]/s^2$

Esta expressão é, no limite, idêntica a:

$[c(x+s,t)-2c(x,t)+c(x-s,t)]/ s^2$

Resolução simplificada de equações de derivadas parciais

Substituindo na equação de difusão e rearranjando:

$c(x,t+r)= c(x,t) + D.\ r/s^2\ [c(x+s,t) - 2c(x,t) + c(x-s,t)]$

em termos das linhas i e colunas j, obtemos:

$c_{i,j+1}= c_{i,j} + D.\ r/s^2\ [c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}]$

podemos assim mover-nos na grelha progressivamente de t=0 até ao final do periodo T de simulação

Estimação de parametros

- Estrutura de um modelo está ligada aos valores dos seus parametros

- $y = (1-a)\, x + z$
  - se $a = 0$, $y = x + z$
  - se $a = 1$, $y = z$

Estimação de parametros

- Tipos de parametros
  - factores de conversão
    - poluição per capita
  - multiplicadores
    - factor de fertilidade
  - parametros em equações empíricas e teóricas
    - modelos de qualidade da água, leis de física e equações macroeconómicas

Estimação de parametros

- Sistema genérico

  $X(t) = A * X(t-1) + W(t)$

  $Z(t) = X(t) + V(t)$

  em que:

  X= estado do sistema

  Z= observações de X

  A= parametro a estimar

  W(t)= erro do modelo

  V(t)= erro da variável

Estimação de parametros

- Método das tentativas
  - admite-se um valor para A e simula-se o modelo com esse valor sem qualquer referência aos dados
  - compara-se a trajectória definida pelos dados e os obtidos pelo modelo, calculando-se a soma dos resíduos ao quadrado ($S = \Sigma (Zi - Xi)^2$)
  - se A foi estimado correctamente, esta soma é nula ou quase nula

Estimação de parametros

- Método das tentativas (cont.)
  - Prova-se que se W(t)= 0, pode-se obter um erro mínimo com um valor incorrecto para A utilizando este método porque se ignoram os dados no processo de estimação

Estimação de parametros

- Método recursivo dos mínimos quadrados
  - Neste método simula-se o modelo reinicializando o sistema em cada dado. O método tende para uma boa estimação de A se V(t)= 0, falha se V(t)= 0

Estimação de parametros

- Método de filtragem óptima
  - O método baseia-se na reinicialização do sistema em cada ponto com o valor de X(t) mais provável.
  - Este valor é calculado através de um processo de filtragem óptima. Deste modo evitam-se os erros do método anterior quando V(t)= 0

Verificação dos modelos

- Verificação interna
  - coerência da estrutura interna do modelo
  - defensabilidade das relações entre as variáveis
  - dimensões consistentes nas relações entre variáveis
  - programa de computador executa o modelo da forma planeada (verificação passo a passo do programa, confrontando valores obtidos com outros determinados manualmente)

Verificação dos modelos

- Verificação externa
  - comparação de duas amostras: uma amostra de numeros Xi obtidos para uma variável X utilizando o modelo e uma amostra de dados reais. Estas amostras caracterizam-se por parametros como a média e a variância.
  - se o conjunto de numeros Xi é suficientemente grande e os valores são independentes entre si, admite-se que seguem uma lei normal.

Verificação dos modelos

- Verificação externa (cont.)
  - Nesta situação, podem-se efectuar testes de hipóteses (recorrendo a testes como o Chi quadrado).
  - Se os valores de Xi não são independentes entre si, devem-se considerar apenas o quarto ou quinto valor na amostra. Deste modo, reduzem-se os efeitos de dependência.

Verificação de modelos

- Verificação externa (cont.)
  - Nem sempre se dispõe de dados reais. Nestas ocasiões recorre-se a métodos como a:
    - análise de sensibilidade- determinação dos efeitos das variações em parametros dos modelos
    - testes de Turing- consulta de peritos solicitando a análise dos resultados dos modelos

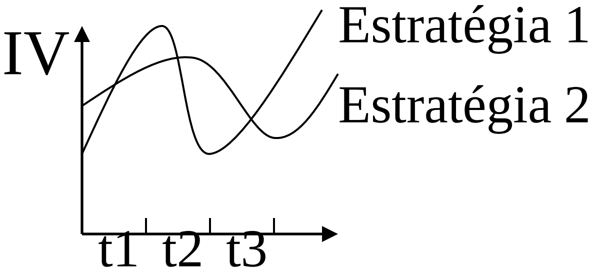
Análise de políticas

- Num modelo de simulação existem dois tipos de variáveis relevantes em gestão:
  - variáveis de controlo (normalmente taxas)
  - variáveis de impacte (variáveis de nível)
- Um conjunto de valores para as variáveis de controlo define uma estratégia
- Para cada estratégia, obtem-se uma trajectória para cada variável de impacte.

Análise de políticas

- Estas trajectórias são vectores. Para comparar estratégias j há que comprimir esses vectores em escalares, calculando IVj:

$IV_j = \Sigma\, w_{ti} .\, IV_{ti},\ \Sigma ti = P$



em que:

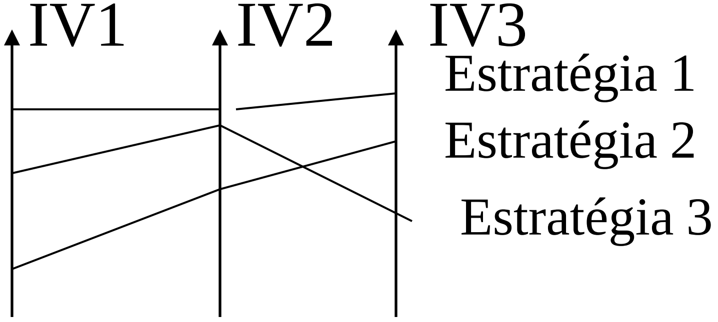
IV_{ti} é a média, máximo, mínimo, moda, mediana, somatório ou outro indíce representando a trajectória da variável de impacte IV para o intervalo ti

ti é intervalo de tempo no período de simulação P

w_{ti} é o peso atribuido ao intervalo de tempo ti

Análise de políticas

- Utilizando um método de visualização de valores (ver decisão com critérios multiplos), onde cada eixo representa uma variável de impacte IVi, podemos escolher as estratégias mais apropriadas.



Caos

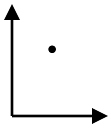
- Modelos de simulação partindo de situações marginalmente diferentes conduzem a soluções substancialmente diversas
- Sistemas de retroacção negativa de segunda ordem com um apreciável valor de retardação e elevados incrementos nos valores das variáveis de estado produzem comportamentos caóticos

Caos

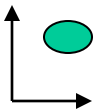
- Análise do caos inicia-se pela determinação de todos os atractores do sistema. Os atractores são objectos geométricos obtidos nos diagramas de fase (gráfico obtido com os valores assumidos pelas variáveis de estado em cada instante do tempo).

Caos

- Existem três tipos de atractores:
  - Ponto, correspondente a uma situação de equilíbrio



  - Periódico, a correspondente a um ciclo



  - Caótico, onde o movimento parece ser inteiramente aleatório

Caos

- Variações nos parametros dos modelos dinamicos conduzem a mudanças nos diagramas de fase.
- Se essas mudanças não são significativas, o sistema é considerado estruturávelmente estável.
- Se o numero ou tipo de atractores muda, diz-se que se produziu uma bifurcação.

Caos

- A variação de valores num parametro do modelo pode então fazer o modelo passar de bifurcação em bifurcação até se atingir o caos.
- Os gráficos de Poincaré, consistindo na representação dos valores (x_t, x_{t-1}) são também utilizados na detecção de situações caóticas